三角関数とその応用

金沢工業大学　基礎教育部
山野剛助

ねらい

自然現象を観察すると，潮の満ち干のように上下運動をくりかえす現象が見られる．また，規則正しく往復運動をくり返す機械も我々の周辺でよく見られる．古来より利用してきた水車では，回転運動を往復運動に変えて製粉や製材等で利用してきた．社会現象の中でも株価やガソリンの価格のように上下の変動をくり返す現象が見られる．くり返される現象を表現しようとすると，三角関数と密接に関連してくる事が多い．ピタゴラスの定理から始まって，三角関数の微分法，回転運動をピストン運動に変えるピストン・クランク機構へと連なる三角関数の世界を楽しんでください．

目次

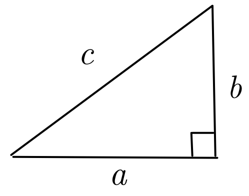
１．三平方の定理（ピタゴラスの定理）

直角三角形では次の三平方の定理（ピタゴラスの定理）が成立している．

定理（ピタゴラスの定理）：直角三角形の斜辺の長さを c とし，その他の辺を a, b としたとき，

$$a^2+b^2=c^2$$

が成立する



この定理の証明として多くの方法が知られており，それを紹介した本もいくつか出版されている[1]．面積計算を用いる証明の１つとして，次の問に示すような正方形を描き，面積の関係を使う方法がある．

問 1.1 次の図 1.1 を用いてピタゴラスの定理を証明せよ．外側の四角形も中側の四角形も正方形である．

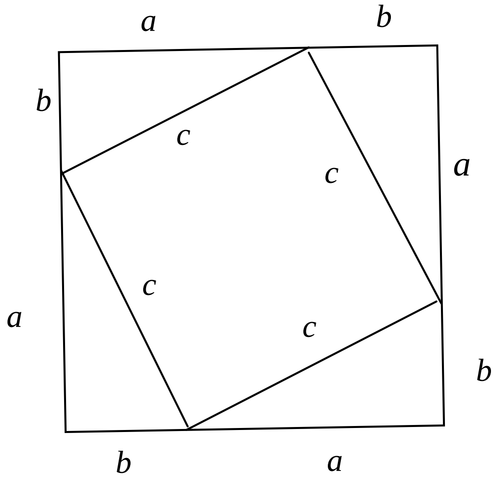


図 1.1 ピタゴラスの定理の図での表現

２．三角比

直角三角形における三角比について復習しておこう．図 2.1 の直角三角形において，角 θ の $\sin\theta$（正弦），$\cos\theta$（余弦），$\tan\theta$（正接）は次の三角比である．

$$\sin\theta = \frac{a}{c} \qquad \cos\theta = \frac{b}{c} \qquad \tan\theta = \frac{a}{b}$$

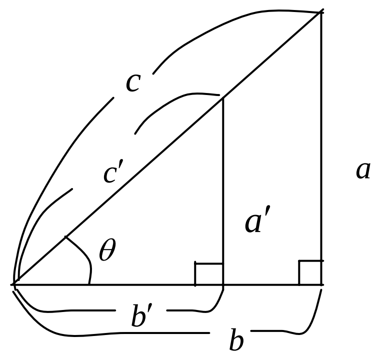


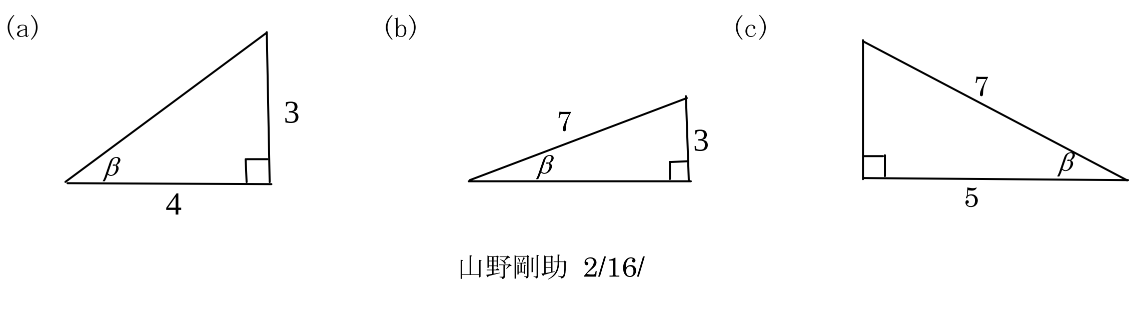
図 2.1 三角比の定義

この三角比は相似の関係から

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \qquad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

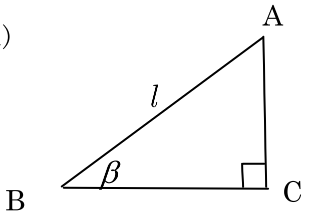
であるから，角 θ によって一意に定まる値であることに注意しておこう．

問 2.1　次の（a), (b), (c）の直角三角形において，それぞれ $\sin\beta, \cos\beta, \tan\beta$ の値を求めよ．ただし，辺の横に書いてある数字は辺の長さを表す．

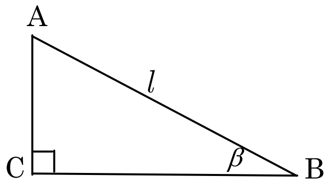


問 2.2　次の（a），(b）の直角三角形において，それぞれ BC,CA を l, β を用いて表せ．

(a)



(b)



３．三角関数

三角関数は，三角比をもとに次のように定義される．角 θ に対して，図 3.1 のように，$\angle \mathrm{POH} = \theta$ とする半径 r の円周上の点を P とし，P の座標を (X, Y) とする．$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ を

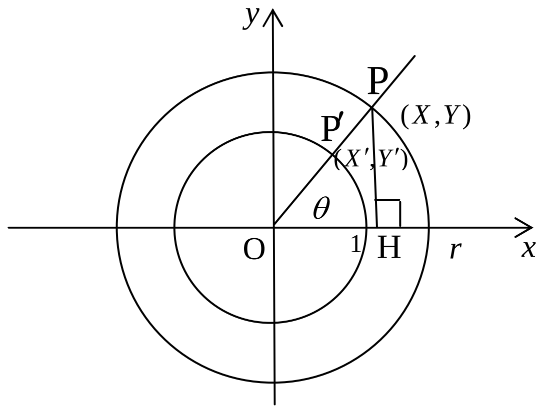


図 3. 1 三角関数の定義

$$\sin\theta = \frac{Y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{X}{r}, \quad \tan\theta = \frac{Y}{X} \quad (X \neq 0)$$

で定義する．θ が変化すれば対応する $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ の値も変化する．このように定義された関数 $f(\theta) = \sin\theta$, $f(\theta) = \cos\theta$, $f(\theta) = \tan\theta$ を**三角関数**という．θ が $0 < \theta < 90^\circ$ のときは，直角三角形 の三角比になっていることに注意しよう．P′の座標を (X', Y') とすれば，相似比の関係より

$$\frac{Y}{r} = \frac{Y'}{1} \qquad \frac{X}{r} = \frac{X'}{1}$$

である．よって，半径 1 の円を考えれば，$\sin\theta$ は点 P′ の y 座標の値，$\cos\theta$ は点 P′ の x 座標の値である．

三角関数に関して成立する性質をいくつか上げてみよう．

(1)　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \qquad 1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta$

(2)　$\sin(\dfrac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta, \qquad \cos(\dfrac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$

(3)　$\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta, \qquad \cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$ （n ：整数）

問 3.1　三角関数の定義より，上記の性質（1),(2),(3）を証明せよ．

加法定理といわれる次の定理は，特に有用である．この定理の証明もいくつかのものが知られている．本や Web で調べてみてほしい．

定理（加法定理）

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

この定理を用いれば，三角関数について一連の公式を得る事が出来る．

倍角の公式：

(1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

(2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

積和の公式：

(1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\qquad 1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta$

(2) $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

(3) $\cos\alpha\ \cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

(4) $\sin\alpha\ \sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

和積の公式：

(1) $\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

(2) $\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

(3) $\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

(4) $\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

問 3.2　加法定理を用いて倍角公式を導け．

問 3.3　積和の公式（2）より，和積の公式（2）を導け，

ヒント；積和の公式（2)において，$\alpha+\beta=A,\quad \alpha-\beta=B$ とおくと

$\alpha=\dfrac{A+B}{2},\quad \beta=\dfrac{A-B}{2}$ となる．

４．弧度法

角を測る単位として，古来より一周を360°とする**度数法**が用いられてきたが，**弧度法**を用いると三角関数の微分を考えるときに便利である．

まず，円周率πについて確認しておく．円周と直径の比を**円周率**という．どんな円でもこの比が一定の値であるので，この値を π で表す．$\pi = 3.1415\cdots$ である．よって，円の半径を r とすると，円周は π と直径の積であるから，円周＝$\pi \times 2r = 2\pi r$ となる．

図 4.1 は原点を中心とする半径 r の円と半径 1 の円を第 1 象限で図示したものである．弧度法は，$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$ を弧 AP の長さとするとき，角の大きさとして

$$x = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}}{r}$$

を用いる方法である．相似比の関係から

$$\frac{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}}{r} = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{A'P'}}}{1} = \overset{\frown}{\mathrm{A'P'}}$$

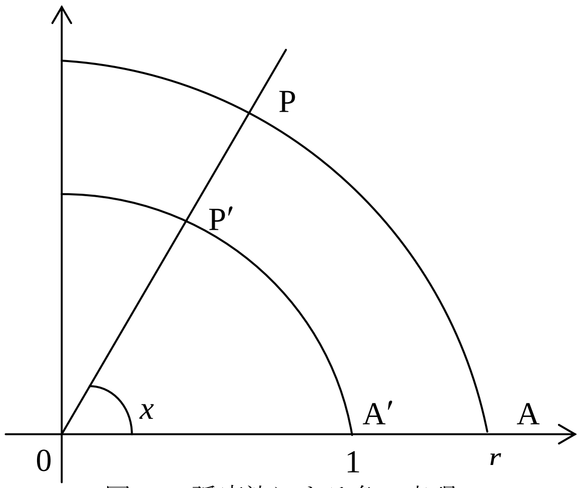


図 4. 1 弧度法による角の表現

であるから，半径 1 の円を考えれば，角の「開き具合」を弧の長さ$\overset{\frown}{\mathrm{A'P'}}$（といっても比の値であるが）で測る方法である．弧度法は単位の名称は**ラジアン**(radian)を用いる．定義より，角 x がラジアン単位であれば，

$$\overset{\frown}{\mathrm{AP}} = rx$$

である．

360°は半径 1 の円では円周の長さ$2\pi \times 1 = 2\pi = 6.28\cdots$に相当する比の値であるから，$2\pi$ ラジアンである．ラジアン単位を用いるときは，ラジアンという単位名は省略する場合が多い．角の度数法と弧度法での表示の対応は次の表 4.1 のようになる．

表 4. 1　度数法と弧度法

度数法	0°	30°	45°	60°	90°	120°	$\cdots$	360°	$\cdots$
弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	2π	$\cdots$

角を，度数法で表したときθとし，弧度法で表したとき x とすれば，$360 : 2\pi = \theta : x$ であるから，

$$x = \frac{2\pi\theta}{360} = \frac{\pi}{180}\theta$$

である．

π の定義を確認することから始まって，たとえば，90°すなわち直角が，ラジアン単位では

$$\frac{\pi}{2} = 1.57\cdots = \overset{\frown}{\mathrm{AB}}\ \text{ラジアン}$$

であることが目に見える（図 4.2）ようであれば弧度法に関しては理解したことになる．

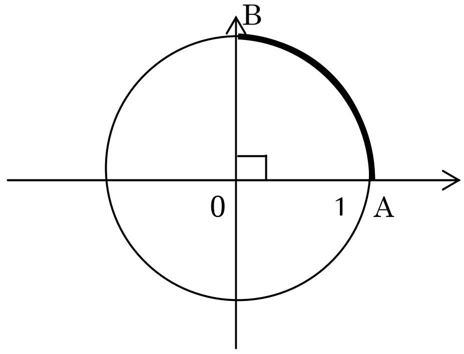


図 4.2　$\pi/2$ ラジアン

問 4.1 図 4.2 のような単位円を書いて，1 ラジアン，2 ラジアン，3 ラジアンの角を図上で示せ．また，1 ラジアンは度数法で何度になるか．

5．導関数と速度，加速度

関数 $y = f(t)$ に対して，$\dfrac{f(a+\Delta t) - f(a)}{\Delta t}$ を t が a から $a+\Delta t$ まで変わるときの $f(t)$ の**平均変化率**という．$f(a+\Delta t) - f(a) = \Delta y$ と記せば，平均変化率は $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ と書け，それは図 5.1 において直線 PQ の傾きである．関数 $y = f(t)$ が y 軸上を直線運動する物体の，時刻 t における位置を表す関数とすれば，平均変化率はその物体の時刻 a から $a+\Delta t$ までの位置の平均変化を示す比率である．

平均変化率において，t の変化 Δt を 0 に近づけるときの極限値，つまり

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(a+\Delta t) - f(a)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

を $f(t)$ の $t = a$ における**変化率**または，**微分係数**という．微分係数を $f'(a)$ で表す． a を変化させて微分係数を考えたとき，すなわち，$a = t$ での微分係数 $f'(t)$ は，また関数を定義する．それを関数 $f(t)$ の**導関数**といい

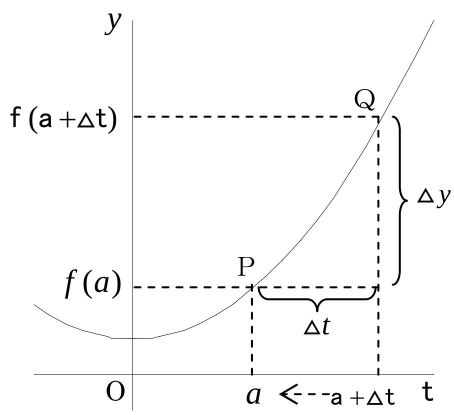


図 5.1 平均変化率

$$y', \quad \frac{dy}{dt}, \quad f'(t), \quad \frac{df}{dt}$$

などで表す．すなわち，

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

である．導関数 $f'(t)$ を求めることを，$f(t)$ を微分するという． 関数 $y = f(t)$ が y 軸上を直線運動する物体の，時刻 t における位置を表す関数とすれば，その導関数はその物体の時刻 t での**速度**を表す．導関数 $f'(t)$ の導関数を

$$y'' , \quad \frac{d^2y}{dt^2} , \quad f''(t) , \quad \frac{d^2f}{dt^2} \quad \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

などで表し，第 2 次導関数という．関数 $y = f(t)$ が y 軸上を直線運動する物体の時刻 t における位置を表す関数とすれば，第 2 次導関数はその物体の時刻 t での**加速度**を表す.

問 5.1 x 軸上を直線運動する物体の，時刻 t［s］での位置 $x = f(t)$ が

$$x = f(t) = -t^2 + 6\mathrm{t} \ \ [\mathrm{m}] \ \ (t \geq 0)$$

で示される運動について

(1) $x = f(t)$ のグラフを描け（横軸に t を，縦軸に x をとって描く）.

(2) $t = 1$ [s] における物体の位置を B 地点とするとき，その x 軸上の座標を求めよ．また，それを下図の A 地点の例のように下図に書き込め．また，その時の速度と加速度を求めよ.

(3) $t = 6$ [s] における物体の位置を C 地点とするとき，その座標を求めよ．また，それを下図に書き込め．また，その時の速度と加速度を求めよ.

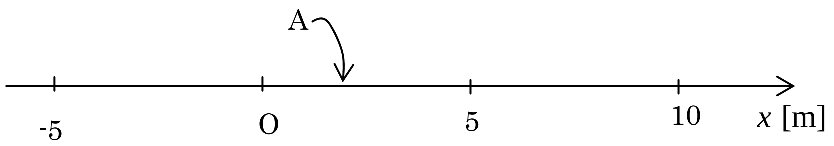


図 5.2 直線運動

６．三角関数の微分法

三角関数の導関数を求めるために，次の極限公式

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

が成立していることを示しておこう.

図 6.1 で x をラジアン単位の角として，$\overline{\mathrm{OA}} = 1$ とする．点 P と点 H を結ぶ直線の長さを $\overline{\mathrm{PH}}$ で表すこととする． x が小さければ小さいほど $\overset{\frown}{\mathrm{PA}}$ と $\overline{\mathrm{PH}}$ の大きさは近づいて行く．これを $\overset{\frown}{\mathrm{PA}} \approx \overline{\mathrm{PH}}$ と表すことと

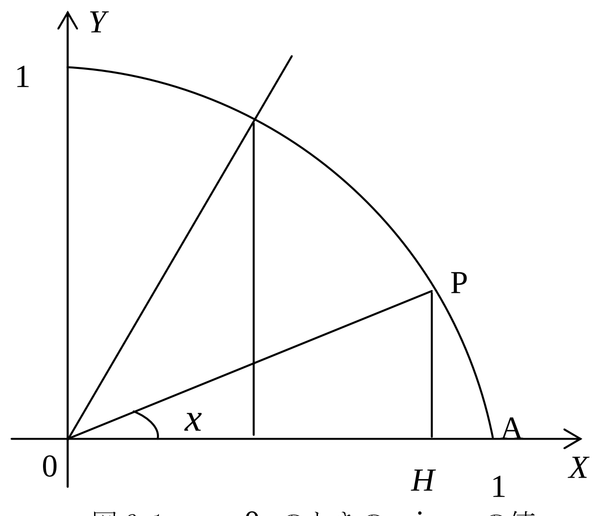


図 6.1 $x \approx 0$ のときの $\sin x$ の値

する．$x = \overset{\frown}{\mathrm{PA}}$，$\sin x = \overline{\mathrm{PH}}$ であるから，これは $x \approx \sin x$ であることを示している.

すなわち

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\overline{\mathrm{PH}}}{\overset{\frown}{\mathrm{PA}}}=1$$

が成立する．

三角関数 $f(x)=\sin x$ については，その導関数は

$$\begin{aligned}
f'(x)=(\sin x)'=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}&=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\sin(x+\triangle x)-\sin x}{\triangle x}\\
&=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{2\cos\dfrac{x+\triangle x+x}{2}\sin\dfrac{x+\triangle x-x}{2}}{\triangle x}\\
&=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\cos(x+\dfrac{\triangle x}{2})\sin\dfrac{\triangle x}{2}}{\dfrac{\triangle x}{2}}\\
&=\cos x
\end{aligned}$$

となる．ここでは，三角関数の差積公式，

$$\sin\theta_1-\sin\theta_2=2\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$$

を用いている．

ここで得られた三角関数の基本公式

$$\boxed{(\sin x)'=\cos x}$$

を実際の計算によって体感するために次の問題をやってみよう．

問 6.1 関数電卓を使用して以下の計算を行え．

(1) 関数 $y=f(x)=\sin x$ について x を -3 から 3 まで 0.1 刻みに変化させたときの関数の値を計算し，次の表 6.1 を完成させた後，これをプロットし，この関数の概形を描け．グラフ用紙を使用せよ．

表 6.1　$\sin x$ の値

x	$\sin x$	x	$\sin x$	x	$\sin x$	x	$\sin x$	x	$\sin x$	x	$\sin x$
−3	−0.14112	−2		−1		0		1		2	
−2.9	−0.23924	−1.9		−0.9		0.1		1.1		2.1	
−2.8	−0.33498	−1.8		−0.8		0.2		1.2		2.2	
−2.7		−1.7		−0.7		0.3		1.3		2.3	
−2.6		−1.6		−0.6		0.4		1.4		2.4	
−2.5		−1.5		−0.5		0.5		1.5		2.5	
−2.4		−1.4		−0.4		0.6		1.6		2.6	
−2.3		−1.3		−0.3		0.7		1.7		2.7	
−2.2		−1.2		−0.2		0.8		1.8		2.8	
−2.1		−1.1		−0.1		0.9		1.9		2.9	
										3	

(2) 関数 $y=f(x)=\sin x$ に対して，この関数の a から $a+0.1$ （a は -3 から 3 まで 0.1 刻みに変化させる） の平均変化率 $\dfrac{f(a+0.1)-f(a)}{0.1}=\dfrac{\sin(a+0.1)-\sin a}{0.1}$ を計算し，次の表 6.2 を完成させた後，グラフを描け．

表 6.2　$y=\sin x$ の平均変化率

a	平均変化率	a	平均変化率	a	平均変化率	a	平均変化率	a	平均変化率	a	平均変化率
−3	−0.981	−2		−1		0		1		2	
−2.9	−0.957	−1.9		−0.9		0.1		1.1		2.1	
−2.8		−1.8		−0.8		0.2		1.2		2.2	
−2.7		−1.7		−0.7		0.3		1.3		2.3	
−2.6		−1.6		−0.6		0.4		1.4		2.4	
−2.5		−1.5		−0.5		0.5		1.5		2.5	
−2.4		−1.4		−0.4		0.6		1.6		2.6	
−2.3		−1.3		−0.3		0.7		1.7		2.7	
−2.2		−1.2		−0.2		0.8		1.8		2.8	
−2.1		−1.1		−0.1		0.9		1.9		2.9	
										3	

(3) この結果は関数 $y=f(x)=\sin x$ について，どのような性質を表わしているかについて述べよ．

7．合成関数の微分法

$y=f(u)$ が u を変数とする関数であり，u がさらに x を変数とする関数 $u=g(x)$ であるとき，$y=f(g(x))$ は x を変数とする関数になる．この関数を g と f の**合成関数**という．たとえば，$y=\sin(x^2)$ は $u=g(x)=x^2$ と $y=\sin u$ の合成関数である．合成関数の微分に関して次の定理が成立する．

> **定理（合成関数の微分法）**：合成関数 $y=f(g(x))$ （$y=f(u)$，$u=g(x)$）に対して，
>
> $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=f'(g(x))g'(x)$$
>
> が成立する．ただし，$f'(g(x))$ は $y=f(u)$ の導関数 $f'(u)$ の u に $g(x)$ を代入した関数を表すものとする．

（証明）

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{g(x+\Delta x)-g(x)}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{g(x+\Delta x)-g(x)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\end{aligned}$$

ここで $g(x+\Delta x)-g(x)=\Delta u$ とおくと，$g(x+\Delta x)=g(x)+\Delta u=u+\Delta u$ であり，$\Delta x\to 0$ のとき $\Delta u\to 0$ である．よって，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{g(x+\Delta x)-g(x)}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}=\frac{dy}{du}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\frac{du}{dx}$$

である．ゆえに，

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{g(x+\Delta x)-g(x)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

となる（証明終）．

この合成関数の微分法を用いれば

$$(\cos x)'=(\sin(x+\frac{\pi}{2}))'=\cos(x+\frac{\pi}{2})\times 1=-\sin x$$

となる．すなわち

$$\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$$

である．

微分演算（導関数を求めるための計算）に関して，合成関数の微分法の他に次の公式が成立する．

(1) $\{cf(x)\}' = cf'(x)$ （c は定数）

(2) $\{f(x)+g(x)\}' = f'(x)+g'(x)$

(3) $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(4) $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

(4) の公式を用いれば $y=\tan x$ の導関数は

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' = \left\{\frac{\sin x}{\cos x}\right\}' &= \frac{(\sin x)'\cos x-(\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{(\cos x)\cos x-(\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}
$$

となる．

例題 7. 1　次の関数 $f(x)=5x\sin 2\pi x$ を微分せよ．

（解） $f'(x)=(5x)'\sin 2\pi x+5x(\sin 2\pi x)'=5\sin 2\pi x+5x(\cos 2\pi x)\times(2\pi x)'$

$\quad = 5\sin 2\pi x+5x(\cos 2\pi x)\times 2\pi = 5(\sin 2\pi x+2\pi x\cos 2\pi x)$

問 7. 1　次の x あるいは t あるいは v を変数とする関数を微分せよ．ただし，A,ω,α は定数とする．

(1) $y=4\sin x$　　(2) $f(x)=\cos(5x+3)$

(3) $f(t)=5\cos 7t$　　(4) $y=\tan 2x$

(5) $y=x\sin x$　　(6) $f(v)=7\sin(2v+3)$

(7) $f(t)=\sin(7t+\dfrac{\pi}{3})$　　(8) $f(t)=A\cos(\omega t+\alpha)$

(9) $g(v)=A\sin(v+2\pi\omega)$　　(10) $y=\sin x\cos x$

８．等速円運動と単振動

三角関数で表される運動をいくつかを取り上げてみよう．図 8.1 で示されるように，半径 A の円周上を**角速度** ω で**等速円運動**をしている物体を考える．物体の時刻 t における位置を $\mathrm{P}(x,y)$ とする．このとき， y 座標は時刻 t の関数になり

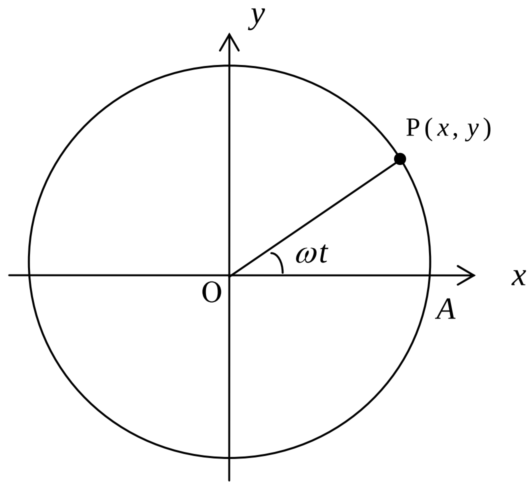


図 8.1 等速円運動

$$y = y(t) = A\sin\omega t$$

で表される．このように時刻 t での変位（位置）が三角関数で表される運動を**単振動**という．このとき，速度，加速度は次のようになる．速度は変位（位置）の変化率であるから

$$v = v(t) = \frac{dy}{dt}$$

である．速度の変化率が加速度であるから

$$a = a(t) = \frac{d^2y}{dt^2}$$

となる．合成関数の微分法の考え方を用いれば

$$v = v(t) = \frac{dy}{dt} = A\cos\omega t \times \frac{d}{dt}(\omega t) = A\omega\cos\omega t$$

$$a = a(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega\sin\omega t \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega t) = -A\omega^2\sin\omega t$$

となる．２番目の式での， $a(t)$ の形に注目すると， $A\sin\omega t = y$ であるから

$$\boxed{(1)\qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y}$$

となる．すなわち，等速円運動をしている物体の y 座標 $y(t)$ は，微分方程式 (1) の解になっている．質量 m の物体に力 $\boldsymbol{F}$ が働くとき，力の向きに生ずる加速度を $\boldsymbol{a}$ とすれば， $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$（Newton の**運動方程式**）が成立する．よって， $y(t) = A\sin\omega t$ で表される単振動（上記の円運動で y 方向のみに注目して考える）では，物体に働く力は

$$F = ma = m\frac{d^2y}{dt^2} = -m\omega^2 y$$

となる．これは変位と逆向きに，変位に比例した力が働いていることを示している．逆に物体に，その物体の変位に比例した力が，振動の中心に向かって働いているとき，Newton の運動方程式

$ma = F$ を用いれば，(1) の微分方程式が成立する．このとき，その解は 次のような三角関数の形

$$y(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$$

で表されることが分かっている．すなわち，その物体の運動は単振動になる．

９．ばね振り子

ばね振り子の例を取り上げてみる．図 9.1 で示されるように，滑らかな水平面上で左方の壁に固定されたばねに取り付けられた振り子があるとする．それをある所まで引き伸ばして静かに放すとどうなるだろうか．振り子はこの水平面上で往復運動をくり返す．水平面上のばねの自然長の場所（ばねを自然に置いた時の振り子の位置）を基準点 O として，経過時間 t に対してこの振り子の場所を $x(t)$ とすれば，時間 t に応じて座標 $x(t)$ がプラスになったりマイナスになったりと変化する．

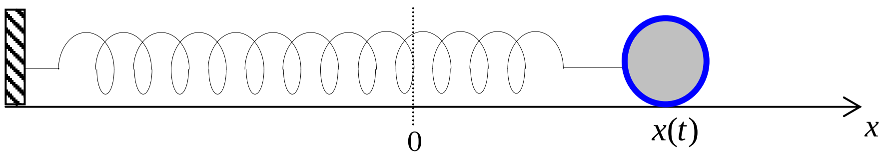


図 9. 1 ばね振り子

ばね定数を k とすると，この場合の復元力はばねの弾性力 F であり， $F = -kx$ と書ける．Newton の運動方程式によれば

$$ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

すなわち，

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

となる．ただし，滑らかな水平面ということで振り子との摩擦は無いものとする．これは前節 (1) 式において $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ の場合であり，変位 $x(t)$ はやはり

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$$

の形で書ける単振動になる． A, α は初期条件によって定まり， ω は振幅 A には無関係になる．たとえば，ばねを基準点から A の位置まで引き伸ばして離した時点を $t = 0$ とすれば，上式において $\alpha = \frac{\pi}{2}$ の場合であり

$$x(t) = A\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = A\cos\omega t$$

となる．

10. ピストン・クランク機構

図 10.1 の様に**クランクシャフト**（回転する軸） OC が 0 を中心に回転するとき、連接棒 CP の端点 P は x 軸上の点 D_1 から D_2 の間をピストン運動する．

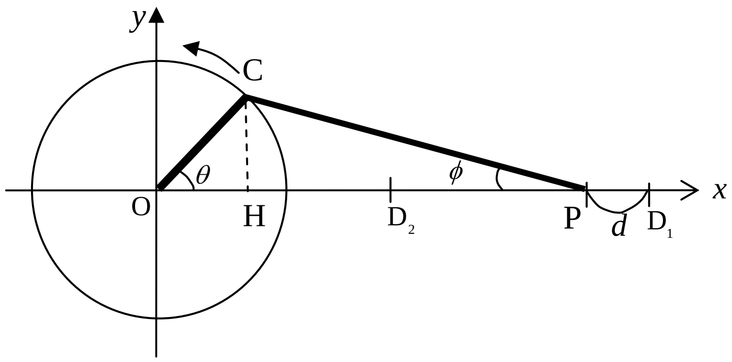


図 10.1 ピストン運動

r＝クランク腕の長さ，θ＝クランク角，l＝連接棒の長さ，ϕ＝連接棒の傾き角，$n=\dfrac{l}{r}$，
d＝ピストンの外側死点 D_1 からの移動距離とするとき，

$$\begin{aligned} d &= r + l - r\cos\theta - l\cos\phi \\ &= r(1-\cos\theta) + l(1-\cos\phi) \end{aligned}$$

である．ここで，$\mathrm{CH} = l\sin\phi = r\sin\theta$ であるから

$$d = r(1-\cos\theta) + l\left(1 - \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}\right) \quad ・・・・①$$

となる．

クランクシャフトの回転が角速度 ω [rad/s] の等角速度運動であるとき、すなわち，$\theta = \omega t$ のとき，① 式の d は時刻 t の関数になり

$$d(t) = r(1-\cos\omega t) + l\left(1 - \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - \sin^2\omega t}\right) \quad ・・・・②$$

となる．

問 10.1（1） ① 式が成立することをもう少し詳しく説明してみよ．

（2） $r = 0.2$ m , $l = 1$ m のときで, クランクシャフトが角速度 $\omega = 2\pi$ rad/s の等角速度運動をするとき、$0 \le t \le 3$［s］ の範囲で ② のグラフを描け．

ヒント：たとえば，t＝0.0，0.1，0.2，...，　2.9，3.0［s］のときの d の値を，電卓を用いて計算し概略のグラフを描く．

グラフは次の図 10.2 のようになったと思います.

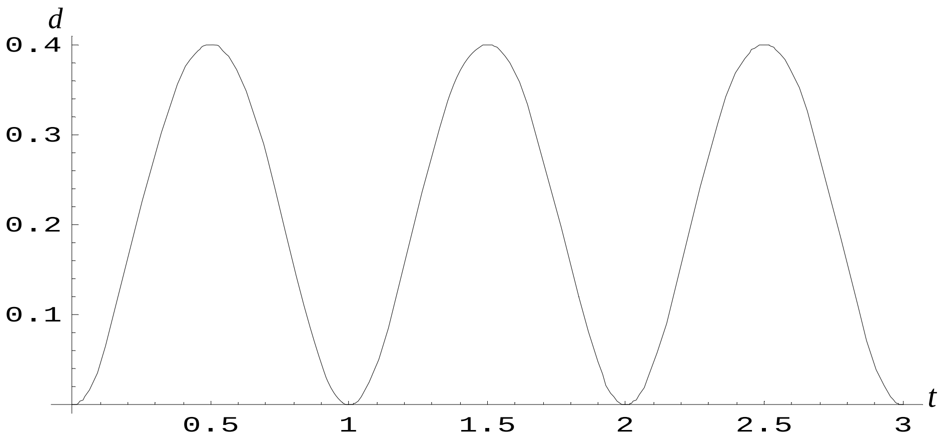


図 10.2 ピストン運動のグラフ

このグラフより P 点の細かな動きが理解できると思います.

それでは P 点の動きの速度について考えてみる. 速度は位置の関数の導関数であるから, ② を微分して得られる. その練習として次の問をやってみよう. $f(x) = x^{\alpha}$ に関する微分公式 $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ より

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

であることに注意しておこう.

問 10.2 次の t を変数とする関数の導関数を求めよ（ω, a, b は定数).

(1) $\sin t$　(2) $\cos t$　(3) $\tan t$　(4) $\sin 2t$　(5) $\cos 2t$

(6) $\tan 2t$　(7) $\sin \omega t$　(8) $\cos \omega t$　(9) $\tan \omega t$　(10) $\sin(\omega t + a)$

(11) $\cos(\omega t + b)$　(12) $\tan(\omega t + b)$　(13) $\sin \omega t + \cos \omega t$　(14) $1 - \sin 2t$

(15) $1 - \cos 2t$　(16) $1 - \sin \omega t$　(17) $a - \cos 2t$　(18) $\sqrt{a^2 - \sin^2 \omega t}$

(19) $5\sqrt{25 - \sin^2 \omega t}$　(20) $a(1 - \cos \omega t) + b(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \omega t})$

この問に解答し, 計算に習熟したところで次の問題をやってください.

問 10.3　クランクシャフトが角速度 ω の等角速度運動をするとき、点 P の速度 v が

$$v = \omega r(\sin \omega t + \frac{\sin 2\omega t}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \omega t}})$$

となることを示せ. また, $r = 0.2$ m, $l = 1$ m, $\omega = 2\pi$ rad /s のとき, $v - t$ グラフを描

け．

さらに，加速度はどうなるでしょうか．微分計算が難しくなってきましたが挑戦してみてください．

問 10.4　点Ｐの加速度αを求めよ．また，$r = 0.2$ m , $l = 1$ m, $\omega = 2\pi$ rad /s のとき，$\alpha - t$ グラフを描け．

おわりに

往復運動は三角関数と密接な関係がある．また，周期的な運動は**フーリエ級数**の立場から見ると三角関数の組み合わせで書ける．最後に取り上げたピストン運動を発展させたものに，**チェビシェフリンク機構**がある．これはモーターの回転を往復上下運動に変える方式で，ロボットの歩行を実現するのに用いられる．Web 等で紹介されているので参照して欲しい．

レジャーランドでシーソーのような遊具に乗ったとき，あるいは，周りで見られる機械の動きで興味を引くものがあったとき，三角関数やその他の関数を思い出せば，その現象に対して一層関心を増すこととなろう．

参考文献

[1]　森下 四郎，ピタゴラスの定理 100 の証明法，プレアデス出版，2006 年．